Cálculo integral de funciones de varias variables

Integrales dobles

Doctor Antonio Francisco Menéndez Leonel de Cervantes

antonio.menendez11@anahuac.mx

Cálculo Multivariado

Temario

1. Cálculo diferencial de funciones de varias variables
1.1 Superficies en el espacio
1.2 Funciones de valor real con varias variables
1.3 Derivación parcial de funciones de varias variables.
1.4 Derivadas de orden superior, diferencial total y regla de la cadena
1.5 Aplicaciones de las derivadas parciales

2. Cálculo integral de funciones de varias variables
2.1 Integrales dobles en coordenadas rectangulares y polares
2.2 Integrales triples en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas
2.3 Aplicaciones: centros de masa, momentos de inercia, densidades de probabilidad

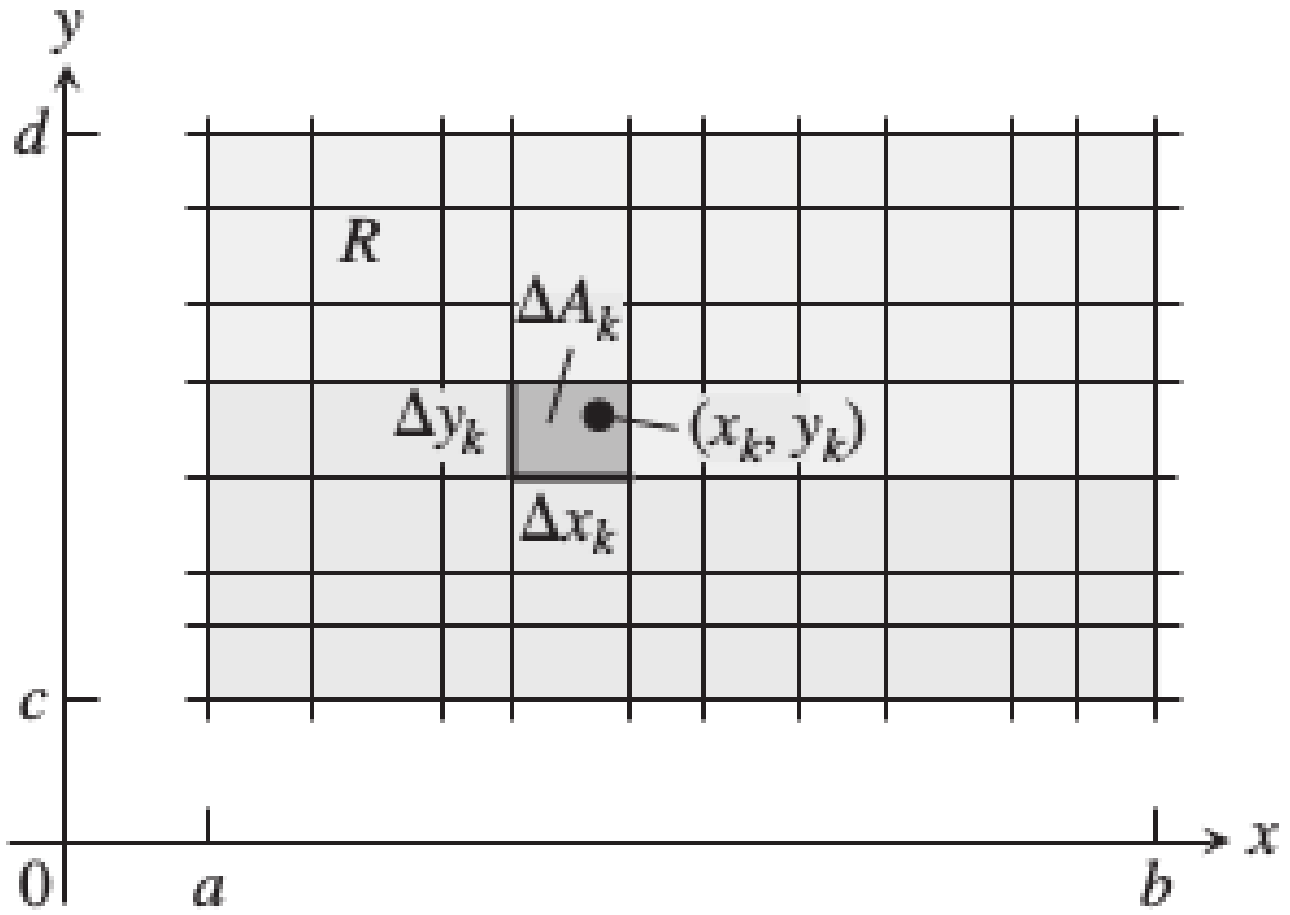
3. Cálculo de funciones vectoriales
3.1 Parametrización de funciones
3.2 Cálculo de funciones vectoriales en el plano
3.3 Cálculo de funciones vectoriales en el espacio
3.4 Aplicaciones: velocidad y aceleración, longitud de arco

4. Introducción a los campos vectoriales
4.1 Definición de campo vectorial
4.2 Divergencia y rotacional
4.3 Integrales de línea
4.4 Teoremas de Green, Gauss y Stokes

Integración de funciones de varias variables

Integrales dobles.

Si f(x,y) está definida en una región rectangular R: a ≤ x ≤ b y c ≤ y ≤ d
se puede subdividir en pequeños rectángulos de dimensiones Δx por Δy con área ΔA= ΔxΔy.



Integrales dobles como área

El área de cada k-ésimo pequeño rectángulo es: = ΔxΔy = ΔA
El área total de la región R es la suma de todas esas pequeñas áreas (sumas de Riemann):

$$S_n = \sum_{k=i}^{n} \Delta_x \Delta_y = \sum_{k=i}^{n} \Delta_A$$

Cuando existe el límite de las sumas S_n es porque se obtiene el mismo valor límite sin importar las elecciones que se hagan entonces es integrable, mientras que al límite se le conoce como la integral doble de R, y se representa como:

$$\lim_{\Delta_A \to 0} S_n = \int \int_R dx\,dy = \int \int_R dA$$

El área total "A" de una región rectangular R: a ≤ x ≤ b y c ≤ y ≤ d es:

$$A = \int_c^d \int_a^b dx\,dy = \int_c^d \int_a^b dA$$

Integrales dobles como área

Ejemplo:

¿Cuál es el área de un rectágulo con 5 de base y 2 de altura,con un vértice en el orígen?

$$A=\int_{c}^{d}\int_{a}^{b} dx\,dy$$

$$A=\int_{0}^{2}\int_{0}^{5} dx\,dy=\int_{0}^{2}[x]_{0}^{5}\ dy=\int_{0}^{2}5-0\ dy=\int_{0}^{2}5\,dy=[5\,y]_{0}^{2}=10-0=10$$

Integrales dobles como Volumen

Para formar una suma de Riemann sobre R, seleccionamos un punto (x_k , y_k) en el k-ésimo pequeño rectángulo, multiplicamos el valor de f en ese punto por el área ΔA_k , y sumamos todos los productos:

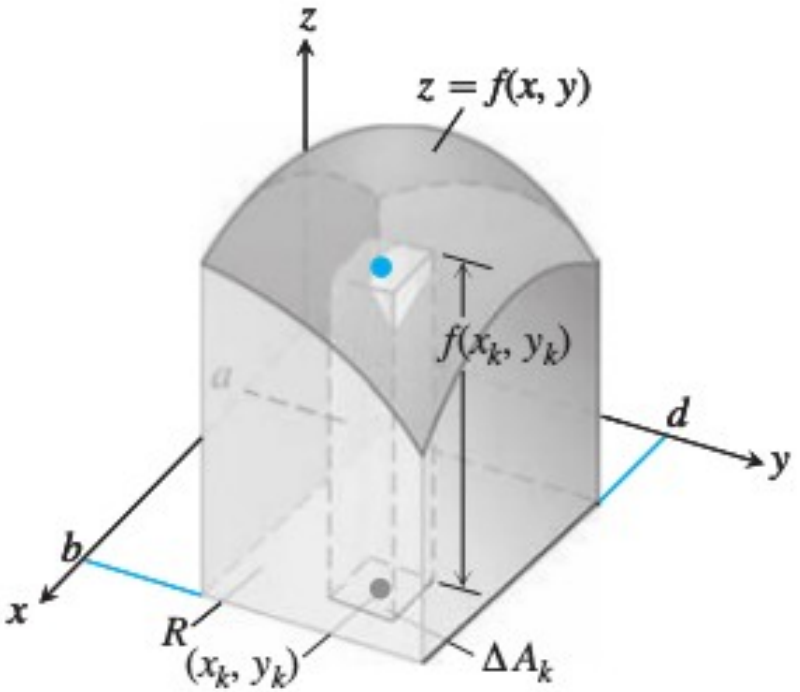
$$S_n = \sum_{k=i}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_A$$

Cuando existe el límite de las sumas S_n es porque se obtiene el mismo valor límite sin importar las elecciones que se hagan, y entonces la función f es integrable, mientras que al límite se le conoce como la integral doble de f sobre R, y se representa como:

$$\lim_{\Delta_A \to 0} S_n = \int\int_R f(x, y)\,da = \int\int_R f(x, y)\,dx\,dy$$

Integrales dobles

Integrales dobles como volumen.
Cuando f (x, y) es una función positiva sobre una región rectangular R del plano xy, podemos interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional en el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie z = f (x, y)



$$Volumen = \lim_{n \to \infty} S_n = \int \int_R f(x, y)\, da$$

$$\Delta_A \to 0 \quad cuando \quad n \to \infty$$

Integración de funciones de varias variables

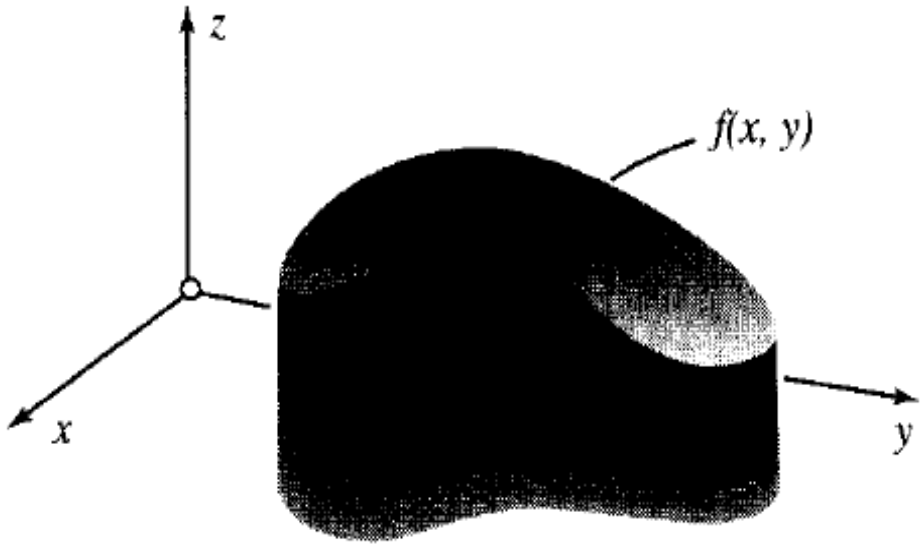
Integrales dobles

El área de una región R en el plano xy está dada por:

$$A = \iint_R da \quad , \qquad da = dx\,dy$$

El volumen V abajo de una superficie z = f(x,y) >0 y arriba de una región R en el plano xy está dado por:

$$V = \iint_R f(x, y)\, da$$



Teorema de Fubini para integrales dobles en regiones rectangulares

1a. Forma del teorema de Fubini para regiones rectangulares.

Si f(x,y) está definida en una región rectangular R: a ≤ x ≤ b y c ≤ y ≤ d

$$\iint_R f(x,y)\,da = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

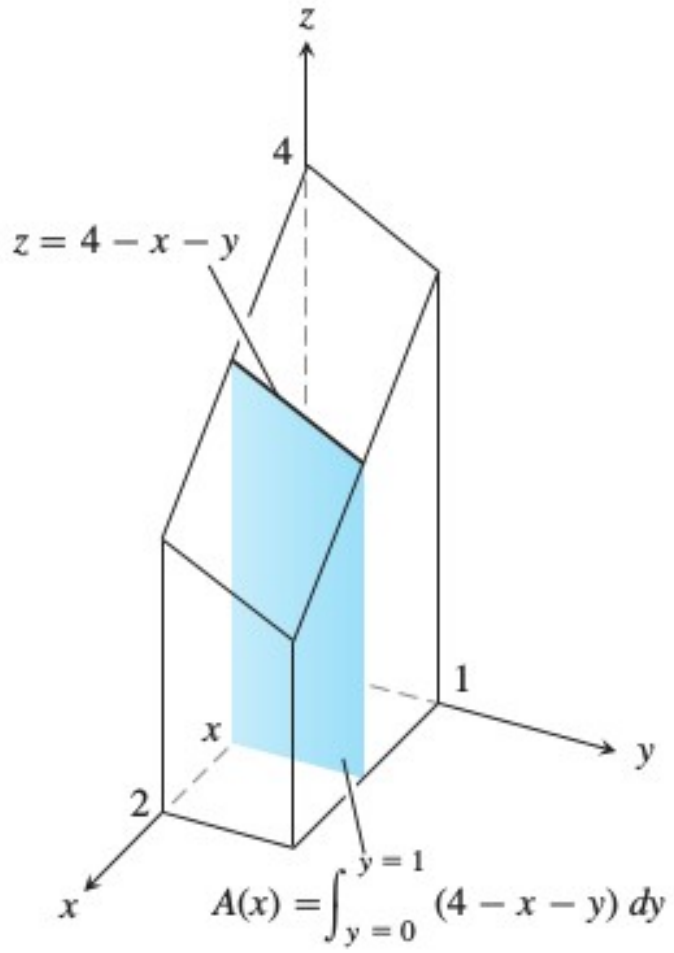
$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Las integrales dobles en una región R se evalúan por medio de dos integrales sucesivas.

Teorema de Fubini 1a. forma

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

Consideremos “rebanar” el sólido en áreas perpendiculares al eje x.



El volumen es la integral del área

$$V = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx$$

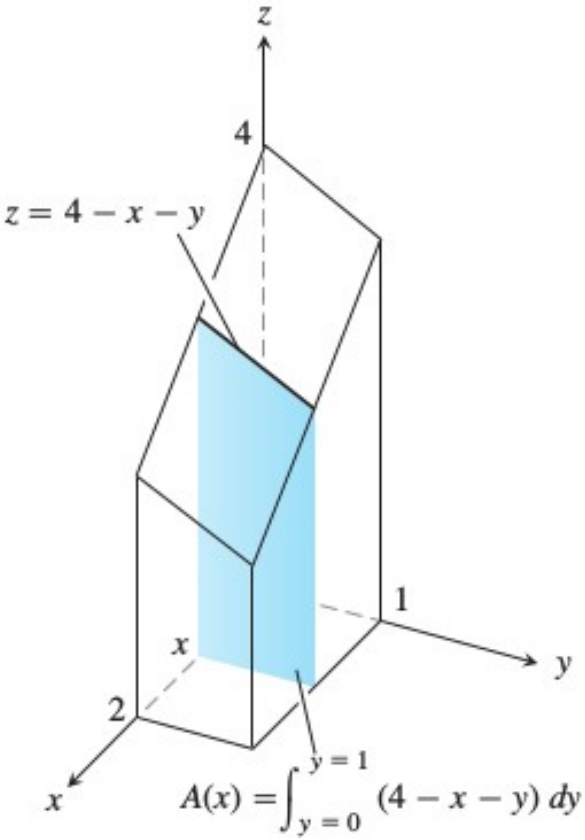
¿Cuál es el área: A(x)?

Teorema de Fubini

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

El área bajo el plano es:

$$A(x)=\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)\,dy$$



Teorema de Fubini para integrales dobles

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

$$V = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\,dx$$

$$V = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,dy\,dx$$

Teorema de Fubini para integrales dobles

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=1}(4-x-y)\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2}\left[4y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx$$

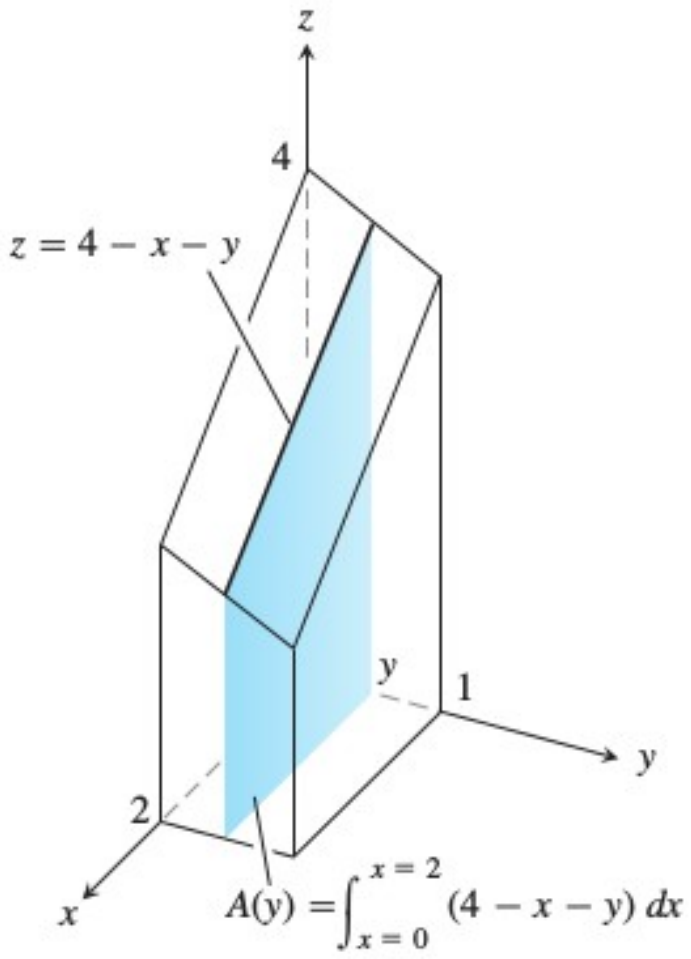
$$\int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\left[x\frac{7}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$V=5$$

Teorema de Fubini para integrales dobles

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

Ahora consideremos “rebanar” el sólido en áreas perpendiculares al eje y.



$$V = \int_{y=0}^{y=1} A(y)\,dy$$

Teorema de Fubini para integrales dobles

Ejemplo: Calcular el volumen que existe bajo el plano z = 4 - x - y sobre la región rectangular R: 0 ≤ x ≤ 2 y 0 ≤ y ≤ 1 en el plano xy.

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)\,dx\,dy$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left[4x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{x=0}^{x=2}dy$$

$$\int_{y=0}^{y=1}(6-2y)dy=\left[6y-\frac{2y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$V=5$$

Teorema de Fubini para integrales dobles

Teorema de Fubini (1a. forma)

Ejemplo: Calcular la siguiente integral doble (volumen) en la región rectangular R: $0 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 1$.

$$f(x, y) = 1 - 6x^2 y \quad \rightarrow \quad \iint_R 1 - 6x^2 y$$

Integración de funciones de varias variables

Ejemplo: Calcular la siguiente integral doble (volumen) en la región rectangular R: $0 \le x \le 2$ y $-1 \le y \le 1$. Integrando primero respecto a x.

$$f(x,y) = 1 - 6x^2 y \quad \rightarrow \quad \iint_R 1 - 6x^2 y$$

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{2} (1 - 6x^2 y)\, dx\, dy$$

$$\int_{y=-1}^{1} \left[x - 2x^3 y \right]_{x=0}^{2} \, dy$$

$$\int_{y=-1}^{1} (2 - 16y)\, dy = \left[2y - 8y^2 \right]_{-1}^{1}$$

$$= (2 - 8) - (-2 - 8) = -6 + 10 = 4$$

Integración de funciones de varias variables

Ejemplo: Calcular el volumen, integrando primero respecto a y.

$$f(x,y)=1-6x^2y \quad \rightarrow \quad \iint_R 1-6x^2y$$

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=-1}^{1}(1-6x^2y)\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{2}\left[y-3x^2y^2\right]_{y=-1}^{1}\,dx$$

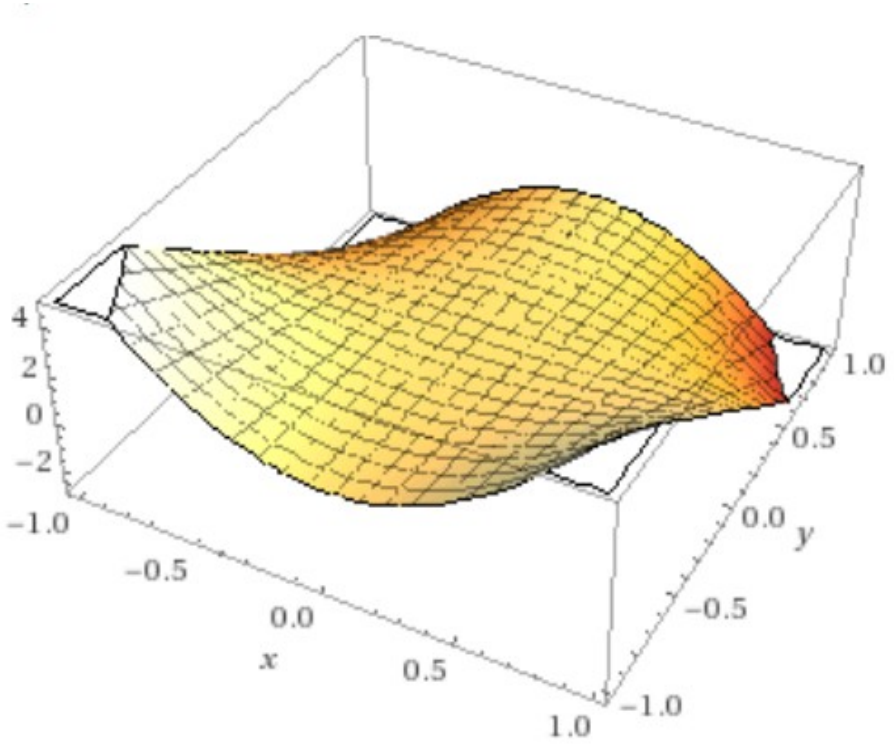
$$\int_{x=0}^{2}(2)\,dx=\left[2x\right]_0^2=4$$

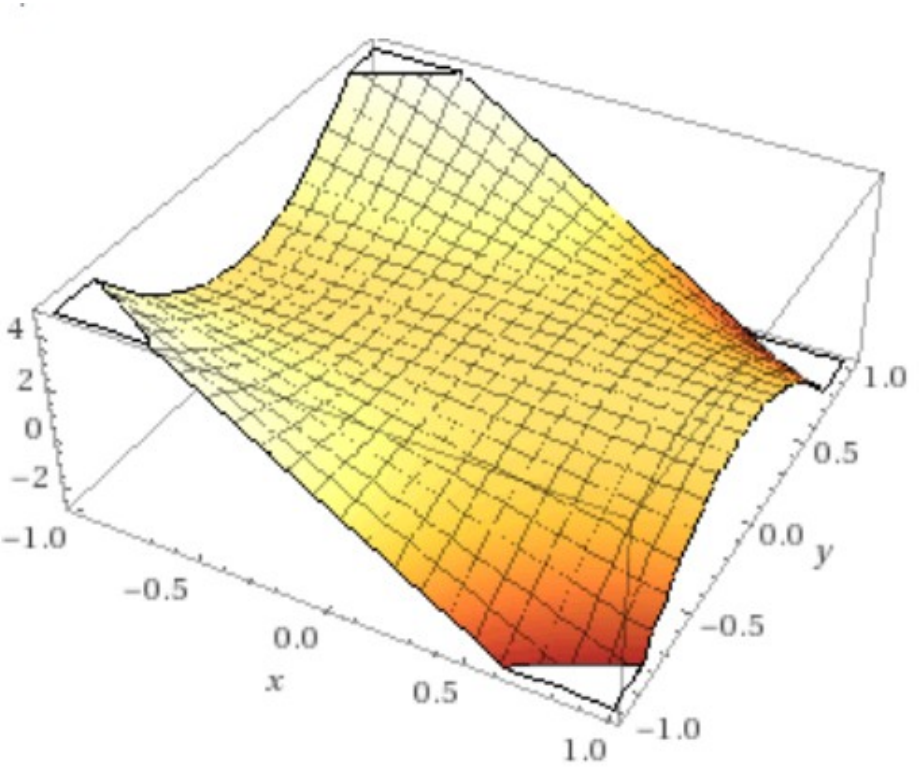
Integración de funciones de varias variables

El ejemplo, es una función simétrica respecto a z

$$f(x,y)=1-6x^2y \qquad V=4$$

$$f(x,y)=1-6y^2x \qquad V=|-4|=4$$





Integrales dobles en regiones generales

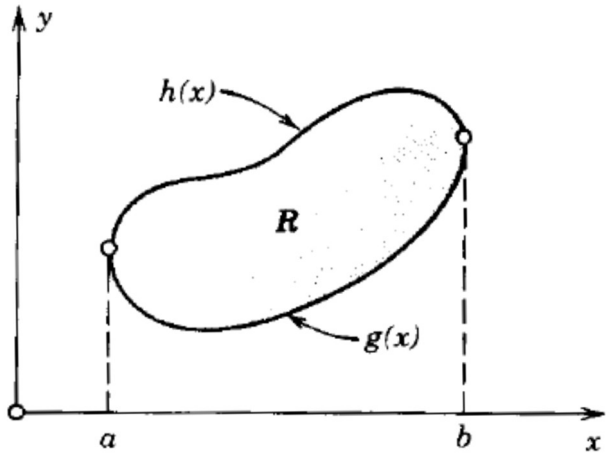
Teorema de Fubini forma más fuerte.

Las integrales dobles en una región R **no rectangular**, se evalúan por medio de dos integrales sucesivas.
En el primer caso suponer que R puede describirse por desigualdades de la forma:

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$

Por lo que y=g(x) y y=h(x) representan la frontera de R.

$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



Integración de funciones de varias variables

Se integra primero la integral interior considerando a x como constante, obteniendo una función de x F(x).

$$F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

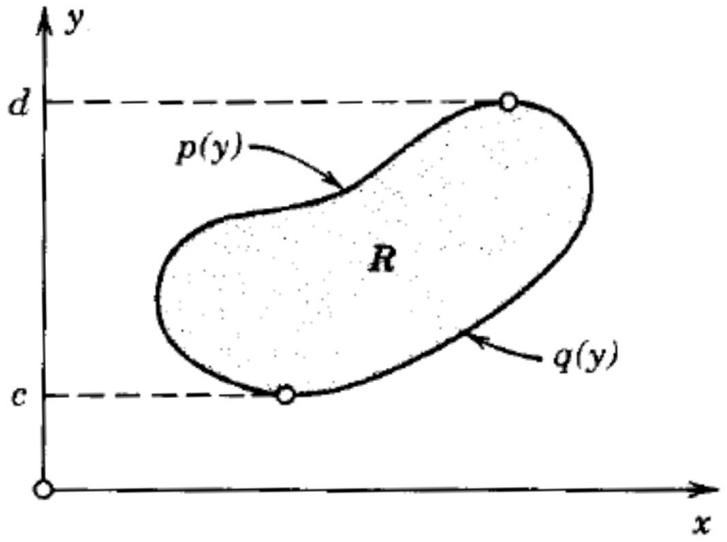
Y al integrar respecto a x de a hasta b se obtiene el valor de la integral doble.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b F(x)\,dx$$

Integración de funciones de varias variables

De forma análoga si R puede describirse por desigualdades de la forma:

$$c \leq y \leq d\,, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$



Se obtiene: (integrando primero respecto a x, tratando a y como constante)

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Integración de funciones de varias variables

Teorema de Fubini.
Forma fuerte para Regiones NO rectangulares.
Si f(x,y) está definida en una región R: $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$

$$\iint_R f(x,y)\,da = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Análogamente.
Si f(x,y) está definida en una región R: $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ y $c \le y \le d$.

$$\iint_R f(x,y)\,da = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Consejos para la integrales dobles en regiones no rectangulares.

1. Elabore un bosquejo con la Región de integración y defina cada curva y cada punto que determinan la frontera.

2. No integre por error áreas rectangulares.

3. Trate de definir los límites de integración de forma que solo sea una Región, ya que de lo contrario habría que sumar todas las integrales dobles de cada región.

Integración de funciones de varias variables

Ejemplo: Calcule la siguiente integral doble en donde R es el triángulo en el plano xy acotado por:

el eje x,
la recta y = x,
y la recta x = 1.

$$\iint_R \frac{sen\, x}{x} da$$

El orden de integración es en ocasiones muy importante.

Teorema de Fubini forma fuerte

Ejemplo: Calcule la siguiente integral doble: $\iint_R \frac{sen\, x}{x}\, da$

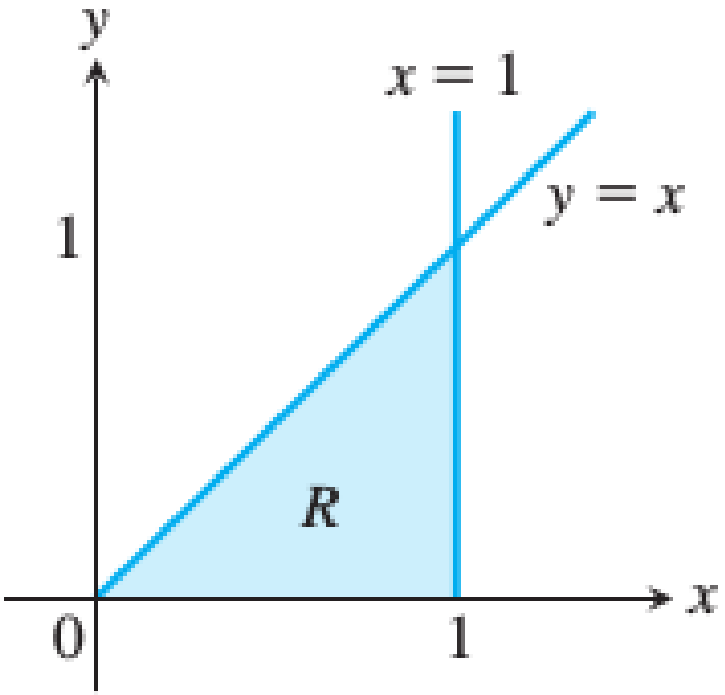
R es el triángulo en el plano xy acotado por: el eje x, la recta y = x, *y* la recta x = 1.

¿Cuáles son los límites de integración de x *y* y, en qué orden se debe integrar?

Hay tres ecuaciones para el triángulo:

y=0
y=x
x=1

Note que sería un error integrar con x de 0 a 1 e y de 0 a 1, se convierte en un cuadado.

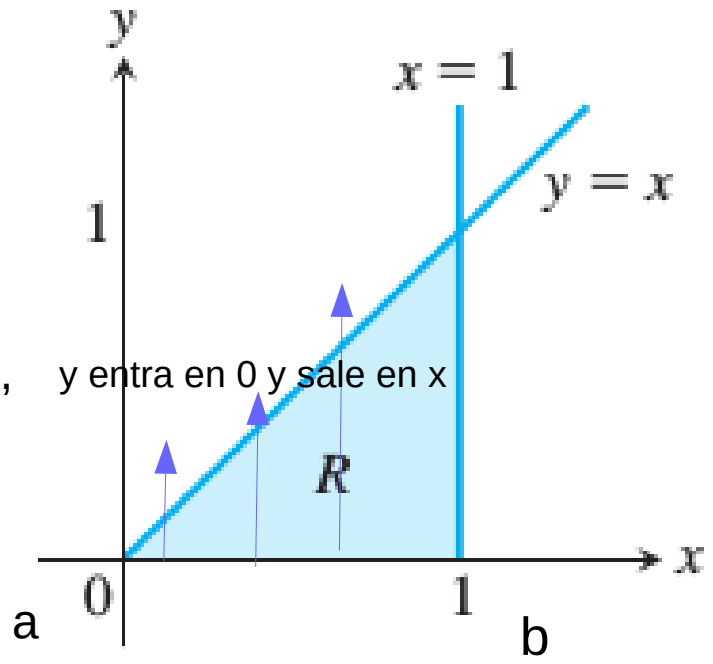


Teorema de Fubini forma fuerte

Primer caso: y es función de x

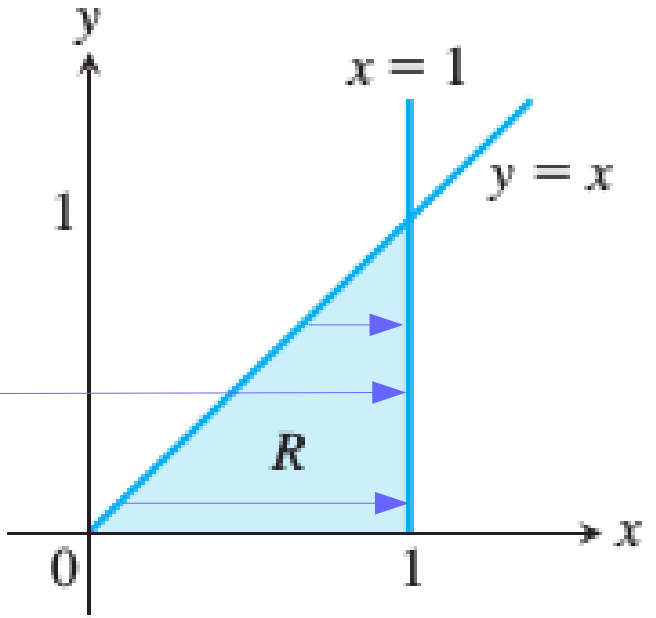
$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

a y b son 0 y 1 los límites de integración “tradicionales”,
g(x) es: y=0, h(x) es y=x.
i.e. y entra en 0 y sale en x



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Segunda opción:
c y d, 0 y 1 son los límites de integración para y,
p(y) es: x=y ,y q(y) es x=1
i.e. x entra en y y sale en 1

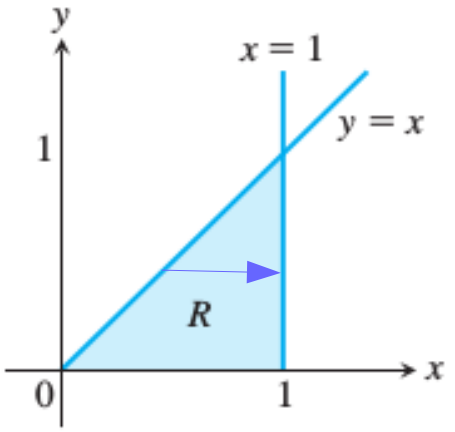


Integración de funciones de varias variables

Una opción es:

$$0 \le y \le 1 \qquad y \le x \le 1$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} \frac{sen\, x}{x}\, dx\, dy$$



¿Cuál es la integral de: sen x / x?

Integración de funciones de varias variables

$$\int_{y=0}^{y=1} \left[y\, Si(x) \right]_{x=y}^{x=1} \; dy$$

Para el Seno imaginario usamos la fórmula de Euler y su conjugada:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\, sen(\varphi)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\, sen(\varphi)$$

$$sen(\varphi) = \Im\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\cos(\varphi) = \Re\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

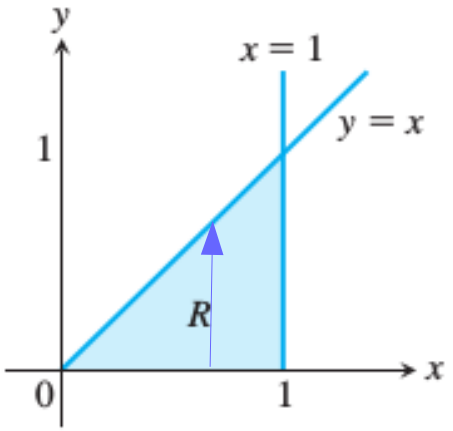
$$\varphi \in \mathbb{C}$$

Integración de funciones de varias variables

Integrando primero respecto a y (claro cambiando los límites de integración):

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le x$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{sen\, x}{x}\, dy\, dx$$



Integración de funciones de varias variables

Ejemplo: Calcule la siguiente integral doble:
R es el triángulo en el plano xy acotado por: el eje x, la recta y = x, *y* la recta x = 1.

$$\int_{x=0}^{x=1} \left[y \frac{sen\, x}{x} dx \right]_{y=0}^{y=x}$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(x \frac{sen\, x}{x} dx \right) = \int_{x=0}^{x=1} \left(sen\, x\, dx \right)$$

$$= \left[-\cos x \right]_{x=0}^{x=1} = -\cos 1 + 1$$

Integrales dobles para calcular áreas

Ejercicio:

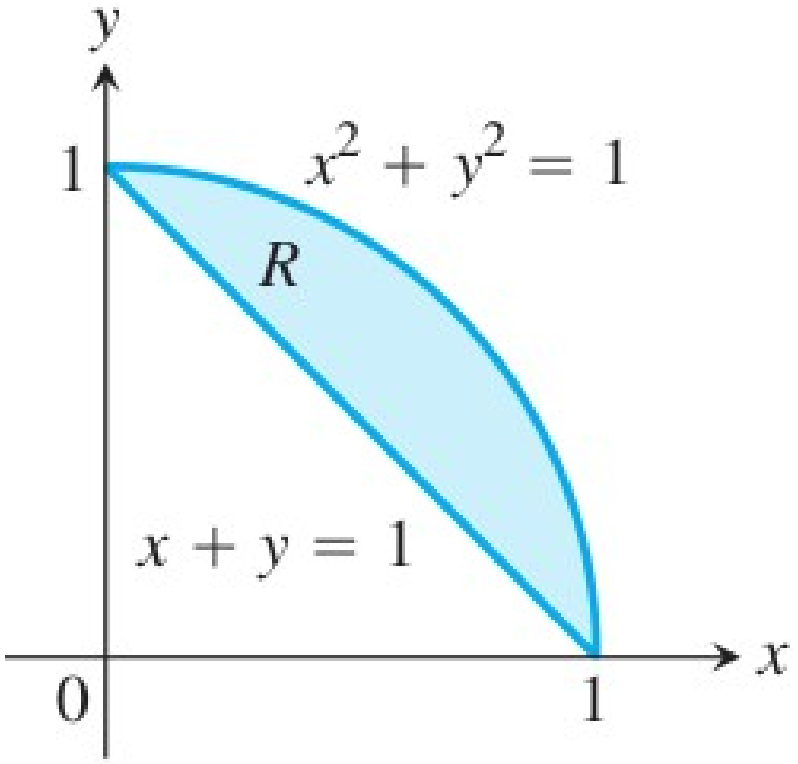
Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 1$, y $x+y = 1$.

Dibuje la gráfica y encuentre los puntos de frontera (intersecciones).

Integrales dobles para calcular áreas

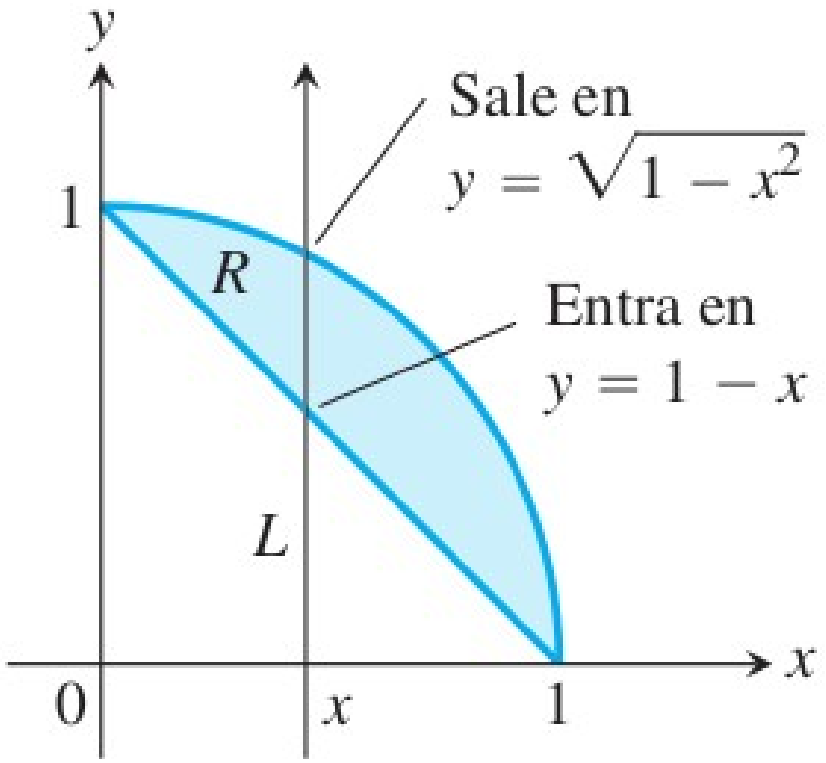
Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 1$, y $x+y = 1$.

Dibuje la gráfica y encuentre los puntos de frontera (intersecciones).



Integrales dobles para calcular áreas

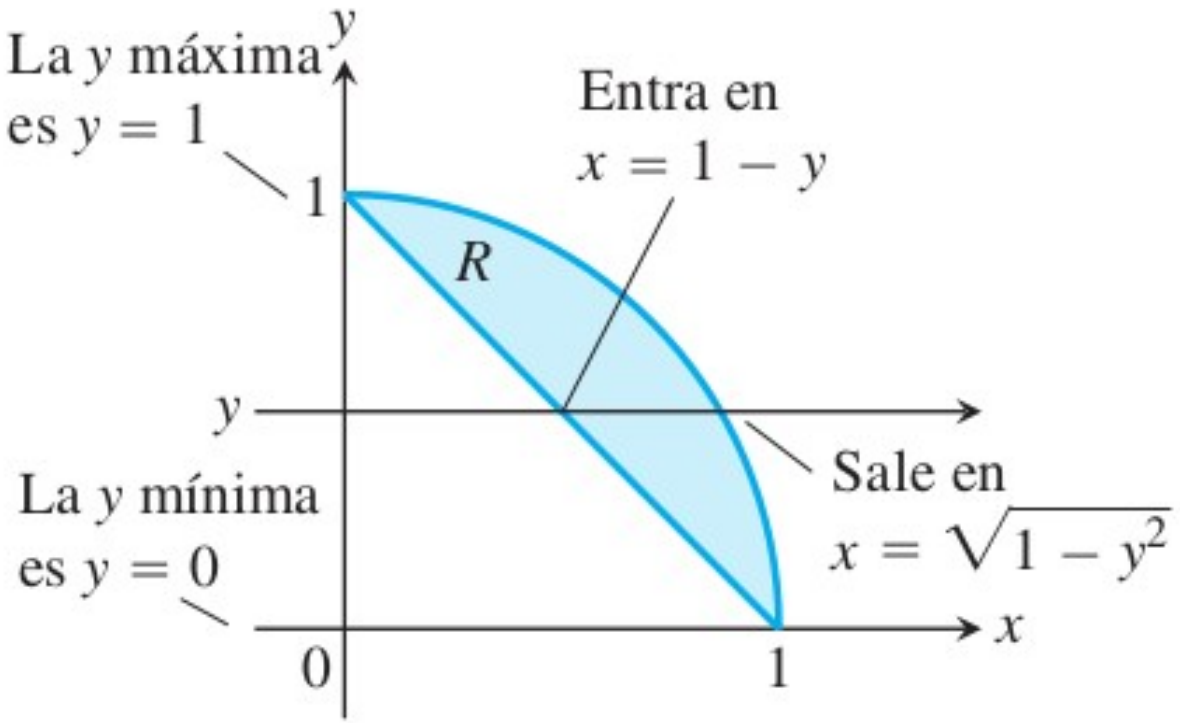
Integrando primero respecto a “y”.



$$\iint_R dA = \int_{x=0}^{1} \int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$$

Integrales dobles para calcular áreas

Integrando primero respecto a “x”.



$$\iint_R dA = \int_{y=0}^{1} \int_{x=1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$$

Integrales dobles para calcular áreas

Los 2 ordenes son análogos.

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} \left[y\right]_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_{x=0}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right) dx = \int_{x=0}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}-1+x\right) dx$$

$$= \left[\frac{a\sin(x)+x\sqrt{1-x^2}}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}$$

Integrales dobles para calcular volúmenes

Ejercicio:

Calcular el volumen de $f(x,y)=4x+2$

en la región dada por las desigualdades: $x^2 \leq y \leq 2x$, $0 \leq x \leq 2$.

Integrales dobles para calcular volúmenes

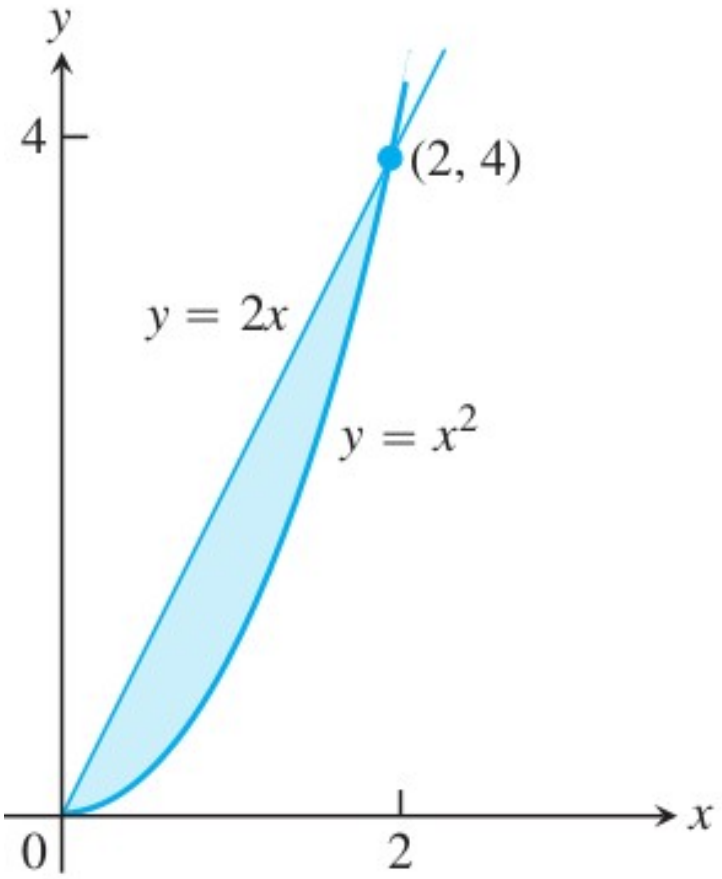
Calcular el volumen de f(x,y)=4x+2
en la región dada por las desigualdades: $x^2 \leq y \leq 2x$, $0 \leq x \leq 2$.

$$V = \iint_R (4x+2)\,dA$$

La región está acotada por las curvas $y=x^2$, $y=2x$,
entre x=0 y x=2

Integrales dobles para calcular volúmenes

Integrando primero respecto a “y”.



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$$

Integrales dobles para calcular volúmenes

Integrando primero respecto a “y”.

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{2}\left[y(4x+2)\right]_{y=x^2}^{2x}dx$$

$$\int_{x=0}^{2}\left[2x(4x+2)-x^2(4x+2)\right]dx$$

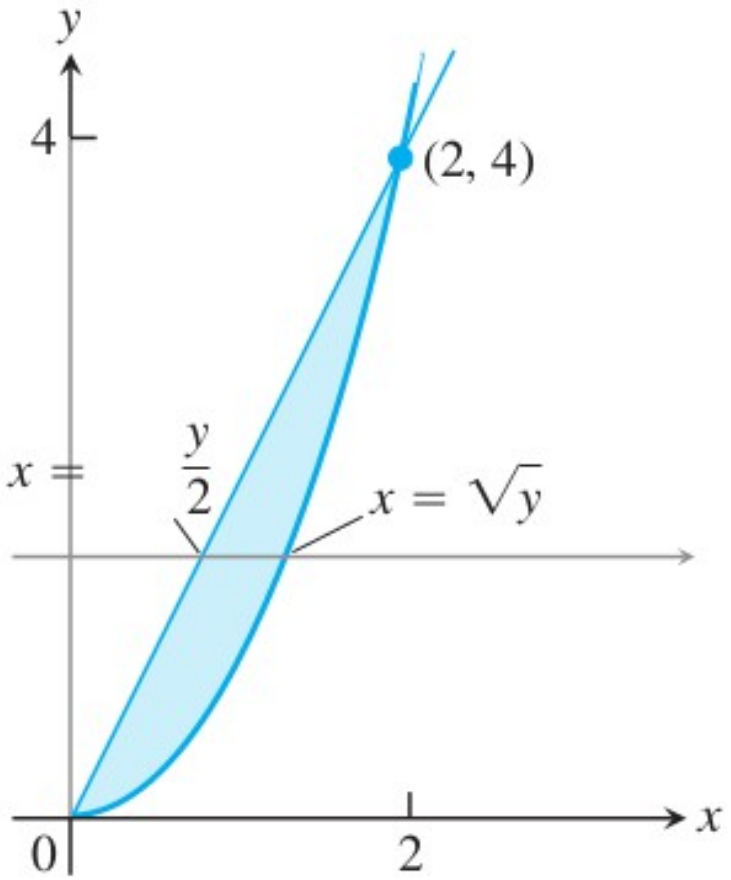
$$\int_{x=0}^{2}8x^2+4x-4x^3-2x^2\,dx$$

$$\int_{x=0}^{2}-4x^3+6x^2+4x\,dx$$

$$\left[-x^4+2x^3+2x^2\right]_0^2=-16+16+8=8$$

Integrales dobles para calcular volúmenes

Integrando primero respecto a “x”.



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{y=0}^{4} \int_{x=y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy$$

Integrales dobles para calcular volúmenes

Integrando primero respecto a “x”.

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{\sqrt{y}}(4x+2)\,dx\,dy$$

$$\int_{y=0}^{4}\left[2x^2+2x\right]_{y/2}^{\sqrt{y}}dy$$

$$\int_{y=0}^{4}2y+2\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}-y\,dy$$

$$\int_{y=0}^{4}2\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}+y\,dy$$

$$\left[\frac{4}{3}y^{3/2}-\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$\frac{4}{3}8-\frac{64}{6}+8=8$$

Integración de funciones de varias variables

Ejercicio Granville cap. XXV, pág 612

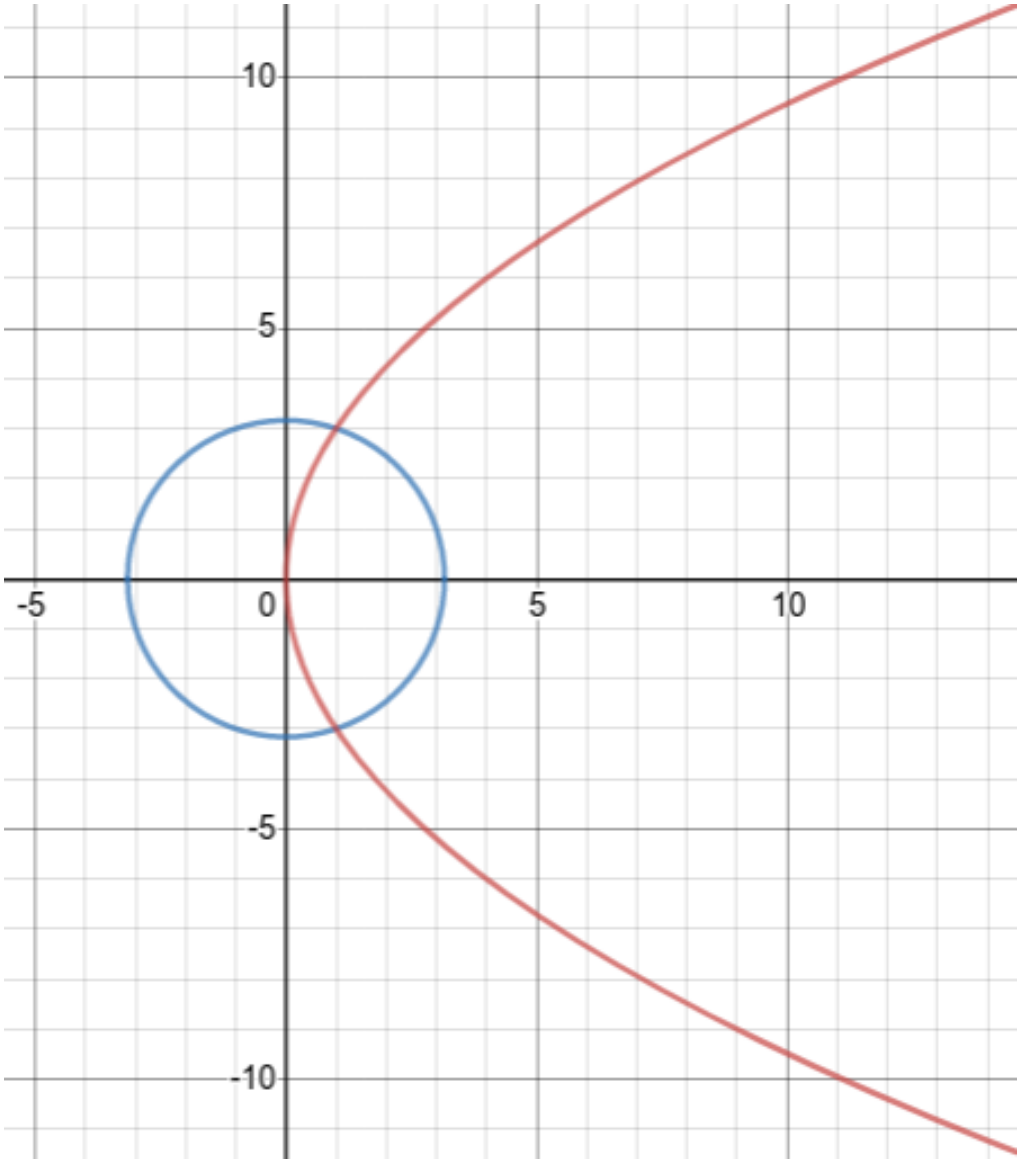
Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Dibuje la gráfica y encuentre los puntos de frontera (intersecciones).

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Dibuje la gráfica.



Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

… encuentre los puntos de frontera (intersecciones). Primero hacemos simultáneas las dos ecuaciones y solo se consideran los puntos del 1er. cuadrante.

$$x^2+y^2=10, \quad y^2=9x$$

$$x^2+9x-10=0 \quad \rightarrow \quad (x+10)(x-1)=0$$

$$x_1=1 \ , \ x_2=-10 \quad no$$

$$y=\sqrt{9x} \ \rightarrow \ y_1=+3 \ , \ y_2=-3 \quad no$$

Punto: (1,3)

Ahora las intersecciónes con los ejes:

$$x^2+y^2=10, \quad x=0 \ \rightarrow \ y^2=10 \ \rightarrow y_1=+\sqrt{10} \ , y_2=-\sqrt{10}$$

$$y^2=9x, \quad x=0 \ \rightarrow \ y=0$$

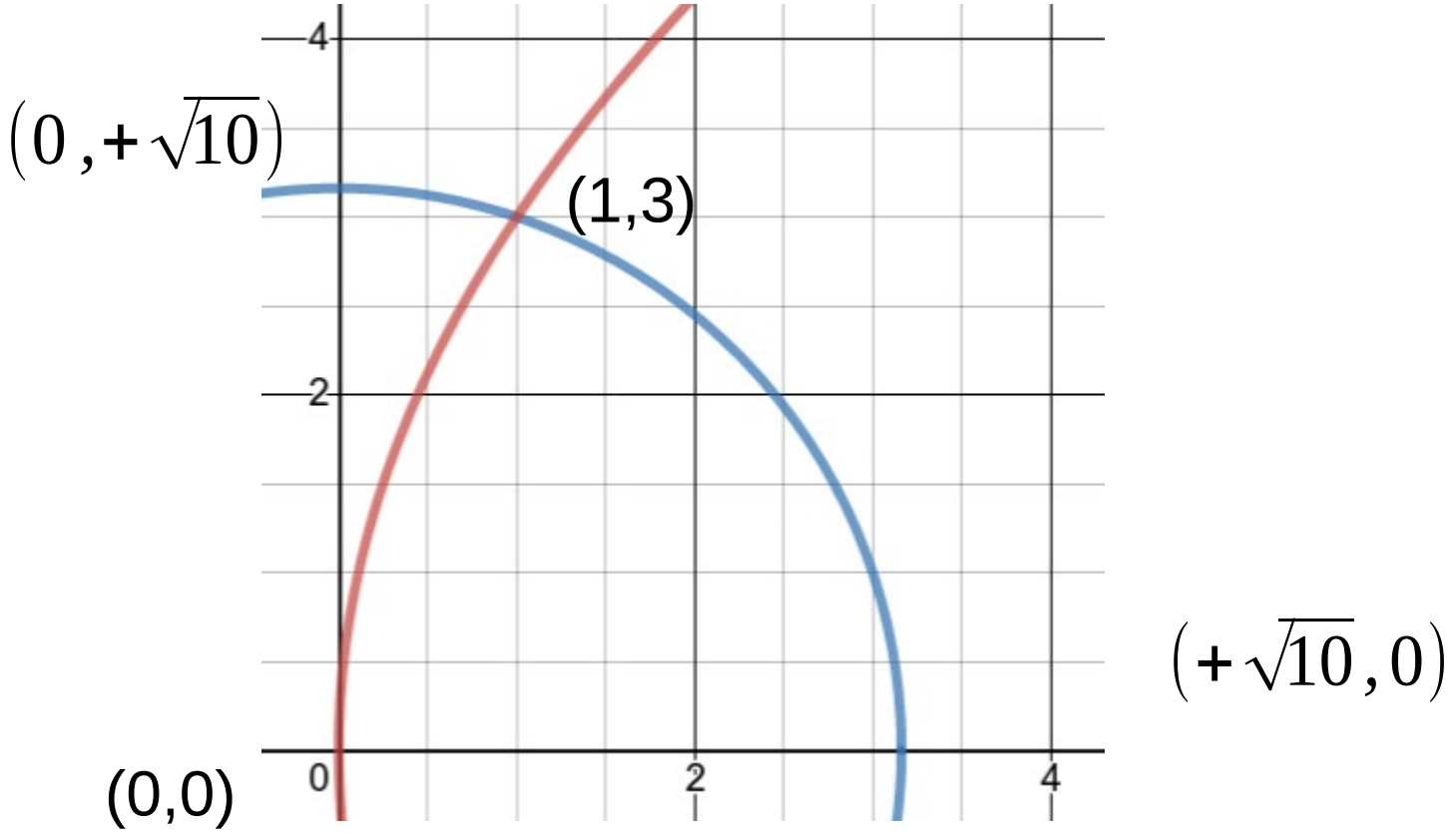
$$x^2+y^2=10, \quad y=0 \ \rightarrow \ x^2=10 \ \rightarrow x_1=+\sqrt{10} \ , x_2=-\sqrt{10}$$

$$y^2=9x, \quad y=0 \ \rightarrow \ x=0$$

Integración de funciones de varias variables

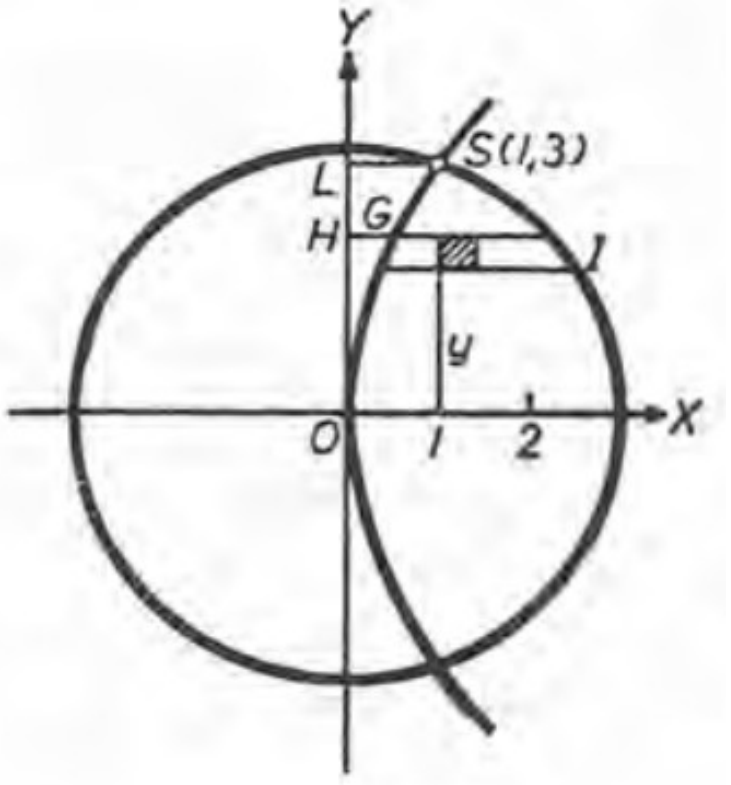
Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Dibuje la gráfica y encuentre los puntos de frontera (intersecciones).



Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

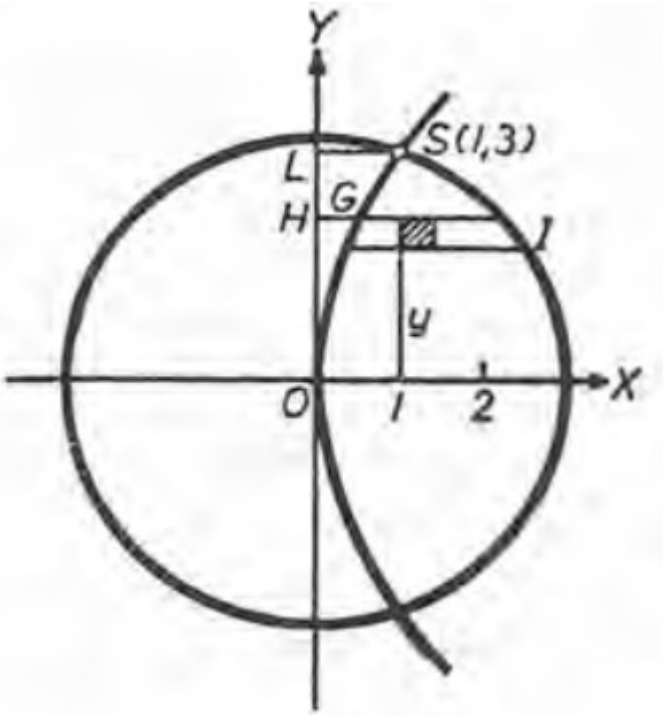


¿Cuáles son los Limites para: ?

$$A = \iint_R dx\, dy$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

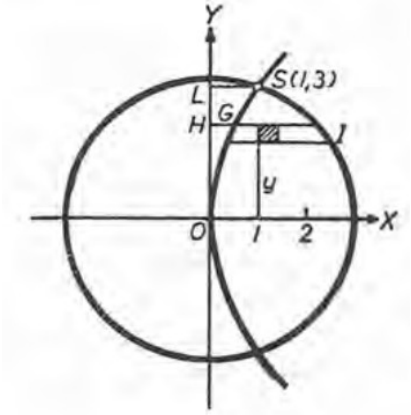


Imtegraremos primero respecto a x que entra en la parábola G y sale en el círculo I, y va de 0 a 3.

$$A = \iint_R dx\,dy$$

Integración de funciones de varias variables

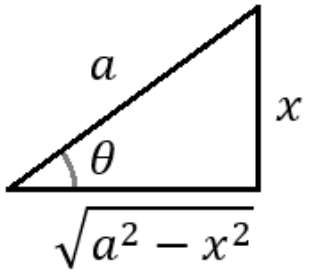
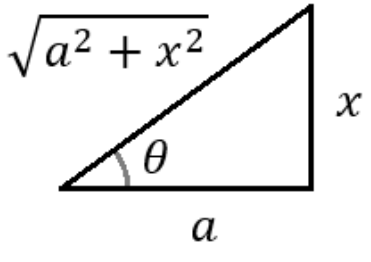
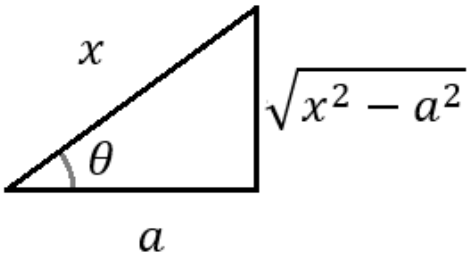
Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.



$$A = \iint_R dx\,dy = \int_{y=0}^{3} \int_{x=y^2/9}^{\sqrt{10-y^2}} dx\,dy$$

$$A = \int_{y=0}^{3} \sqrt{10-y^2} - y^2/9 \; dy$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$$

$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
$x = a\ sen\ \theta$	$x = a\ tan\ \theta$	$x = a\ sec\ \theta$
$dx = a\ cos\ \theta\ d\theta$	$dx = a\ sec^2\ \theta\ d\theta$	$dx = a\ sec\ \theta \tan\theta\ d\theta$
$\sqrt{a^2 - x^2} = a\ cos\ \theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a\ sec\ \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a\ tan\ \theta$
		

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C$$

Substitute $x = a\sin(u) \longrightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right), \mathrm{d}x = a\cos(u)\,\mathrm{d}u$

$$= \int a\cos(u)\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

Simplify using $a^2 - a^2\sin^2(u) = a^2\cos^2(u)$:

$$= a^2\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\int \cos^{\mathrm{n}}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\int \cos^{\mathrm{n}-2}(u)\,\mathrm{d}u + \frac{\cos^{\mathrm{n}-1}(u)\sin(u)}{\mathrm{n}}$$

with $\mathrm{n} = 2$:

$$= \frac{\cos(u)\sin(u)}{2} + \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}u$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

$$A = \int_{y=0}^{3} \sqrt{10 - y^2} \; - \; y^2/9 \; dy$$

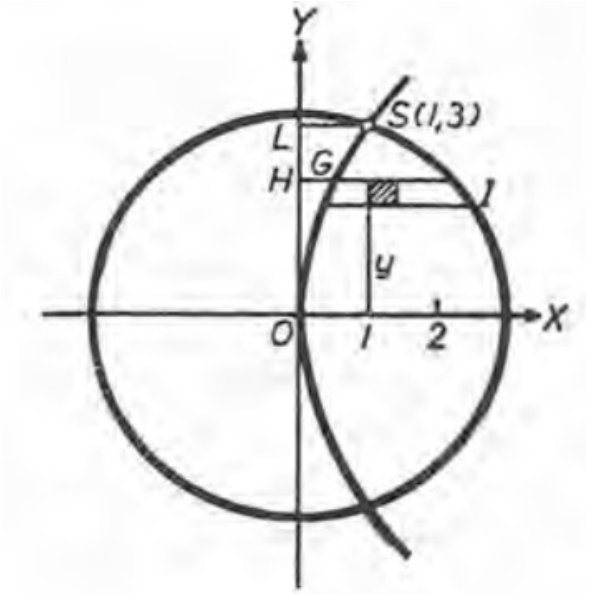
$$A = \left[\frac{y}{2}\sqrt{10 - y^2} \; + \frac{10}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{10}} \; - \frac{y^3}{27} \right]_0^3$$

$$A = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1} \; + \; \frac{10}{2} \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \; - \frac{27}{27} \right]$$

$$A = \frac{1}{2} \; + \; \frac{10}{2} \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1 + 10 \arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)}{2}$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.



$$A = \iint_R dx\,dy = \int_{y=0}^{3} \int_{x=y^2/9}^{\sqrt{10-y^2}} dx\,dy$$

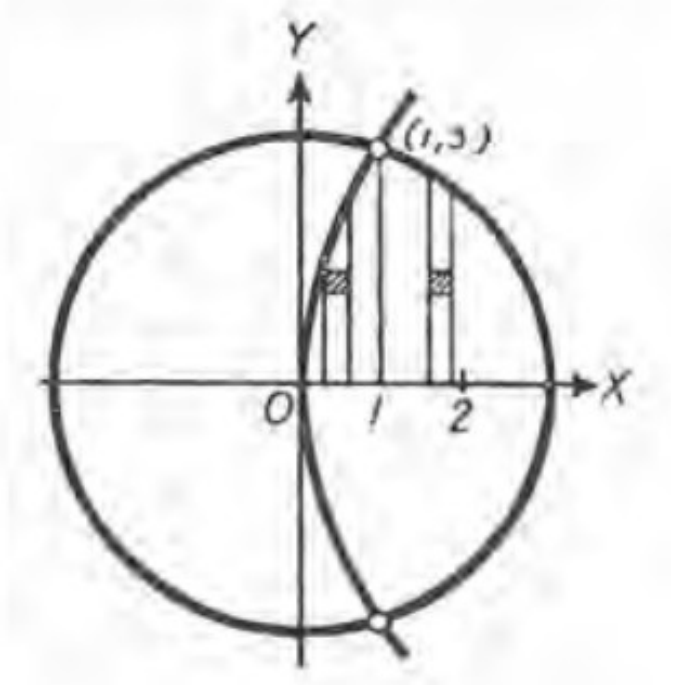
$$A = \frac{1 + 10\arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)}{2} \approx 6.745228861991272$$

<u>Recordar usar radianes</u>

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Inegrando primero respecto a y



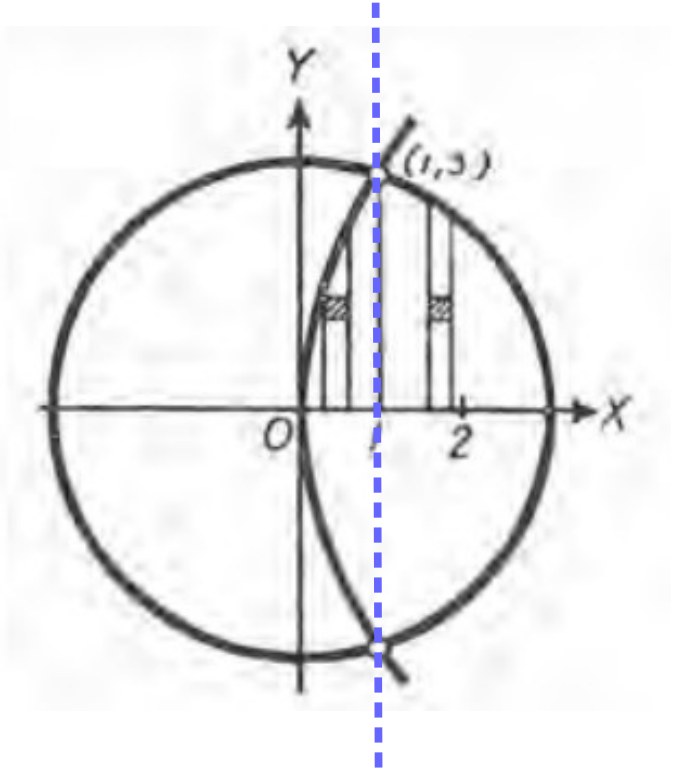
$$A = \iint_R dy\, dx$$

¿Cuáles son los límites de integración,
se puede definir una sola Región?

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Inegrando primero respecto a y



¿Cuáles son los límites de integración, se puede definir una sola Región?

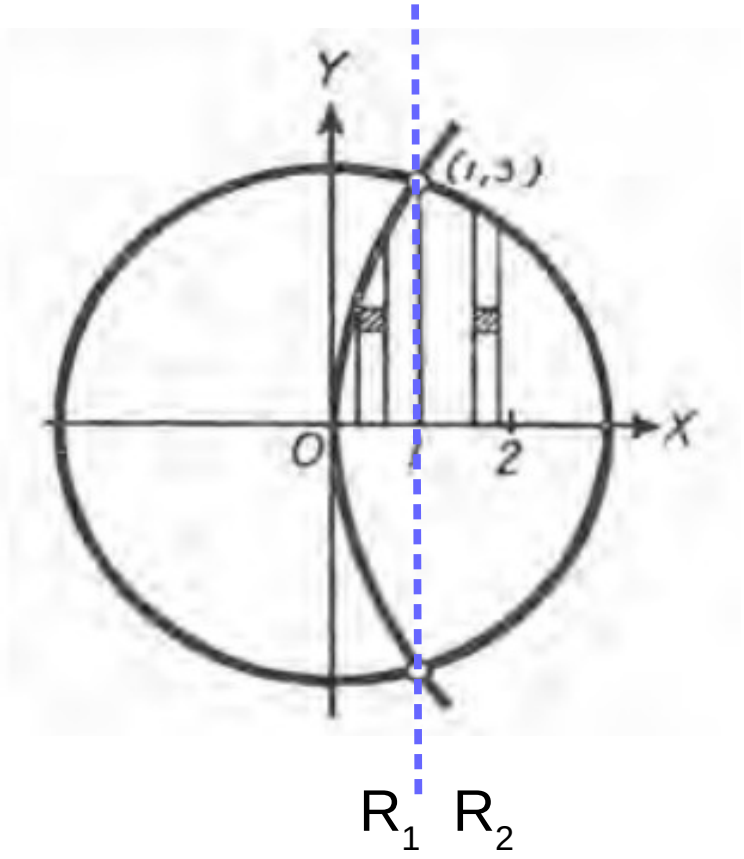
NO, se necesitan 2 Regiones

$$A = \iint_{R_1} dy\,dx + \iint_{R_2} dy\,dx$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

Inegrando primero respecto a y



$$A = \iint_{R_1} dy\,dx + \iint_{R_2} dy\,dx$$

$$R_1 : x \in [0,1], \quad y \in [0, 3\sqrt{x}]$$

$$R_2 : x \in [1, \sqrt{10}], \quad y \in [0, \sqrt{10 - x^2}]$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.
Inegrando primero respecto a y

$$A = \iint_{R_1} dy\,dx + \iint_{R_2} dy\,dx$$

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{3\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{x=1}^{\sqrt{10}} \int_{y=0}^{\sqrt{10-x^2}} dy\,dx$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular el área de una región R en el primer cuadrante , limitada por el eje x , las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.
Inegrando primero respecto a y

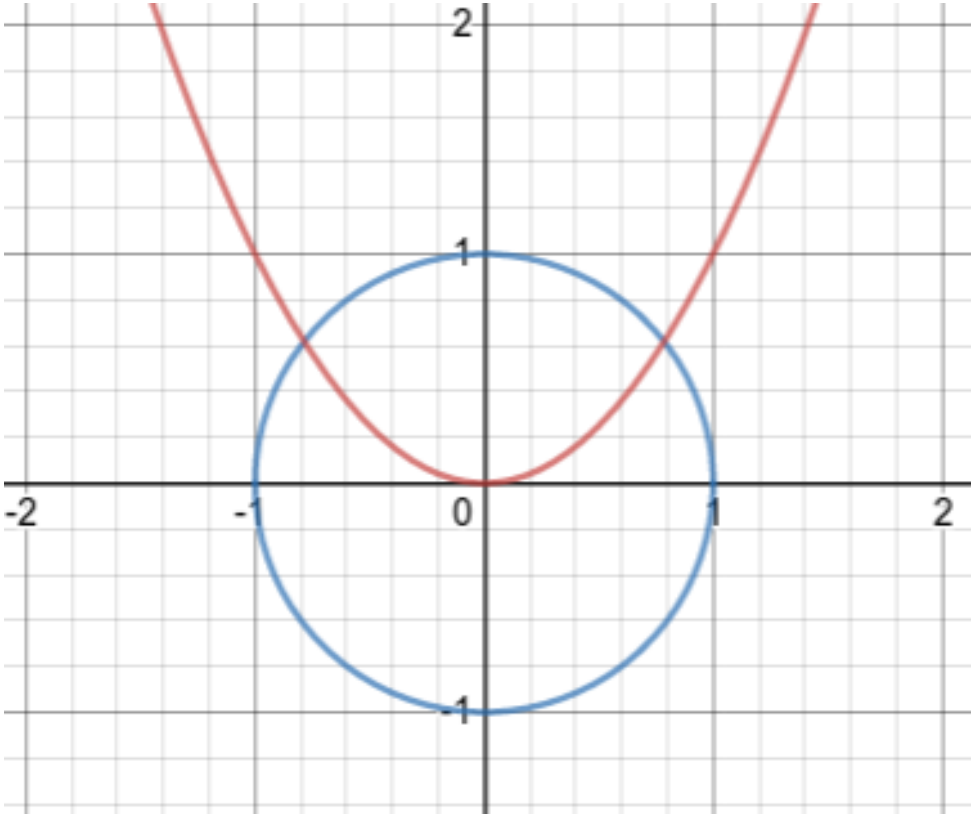
$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{3\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{x=1}^{\sqrt{10}} \int_{y=0}^{\sqrt{10-x^2}} dy\,dx$$

$$A = \int_{x=0}^{1} 3\sqrt{x}\,dx + \int_{x=1}^{\sqrt{10}} \sqrt{10-x^2}\,dx$$

Convirtiendose en dos integrales tradicionales, por ello el orden de integración debe ser tal que el área se de por una sola integral doble (si es que es posible).

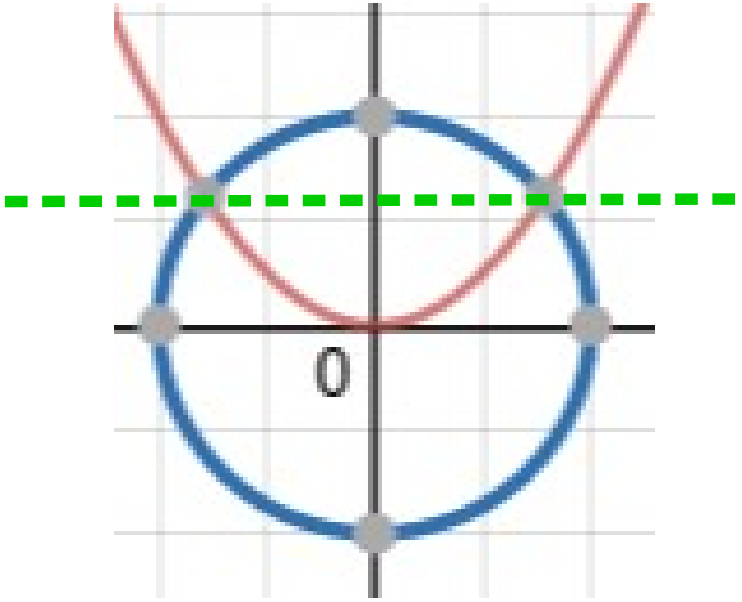
Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$.



Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$.

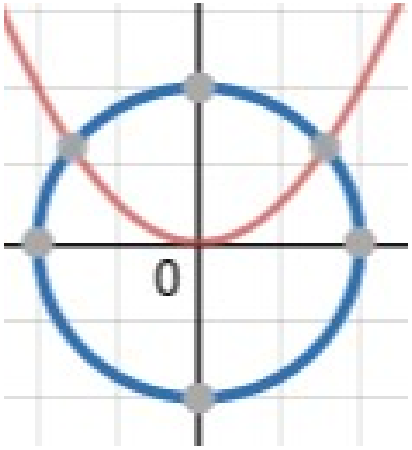


Primero integrar por x, resulta en dos regiones.

Sumar 2 integrales dobles para encontrar el área.

Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$. Integrando primero respecto a y:



$$x^2+y^2=1,\ y=x^2 \ \rightarrow\ y+y^2=1$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Sugerencia: calcular el área del primer cuadrante y multiplicarla por 2.

Punto de intersección: (0.786131, 0.618034)

$$A = 2\int_{x=0}^{u}\int_{y=x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 2\int_{x=0}^{0.786}\int_{y=x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$u=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$.

$$A = 2 \int_{x=0}^{u} \int_{y=x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$$

$$A = 2 \int_{x=0}^{u} \sqrt{1-x^2} - x^2\, dx$$

$$A = 2 \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^u$$

$$A = 2 \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^u$$

$$u = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \ \ldots$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$.

$$A = 2 \int_{x=0}^{0.786} \int_{y=x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$$

$$A = 2 \int_{x=0}^{0.786} \sqrt{1-x^2} - x^2 dx$$

$$A = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.786}$$

$$A = 2 \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.786}$$

Realice el cálculo exacto con x= 0.786151377757423

Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando (hoja de cálculo) ...

1	$y^2+y-1=0$	0.618033988749895
2	$x=y^2$	0.786151377757423
3		
4	$x=\sqrt{y^2}$	0.786151377757423
5	$\sqrt{1-x^2}$	0.618033988749895
6	arcsen x	0.904556894302381
7		
8	(4(5)+6) /2	0.695212583029513
9		
10	x^3	0.485868271756646
11	$x^3 / 3$	0.161956090585549
12		
13	8-11	0.533256492443965
14		
15	2(13)	1.066512984887930

$$A = 2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{0.786}$$

Integración de funciones de varias variables

Calcular, usando integrales dobles, el área comprendida en el círculo unitario, sobre la parábola $y=x^2$.

$$A = 2\int_{x=0}^{0.786}\int_{y=x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$$

$$A = 2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{0.786}$$

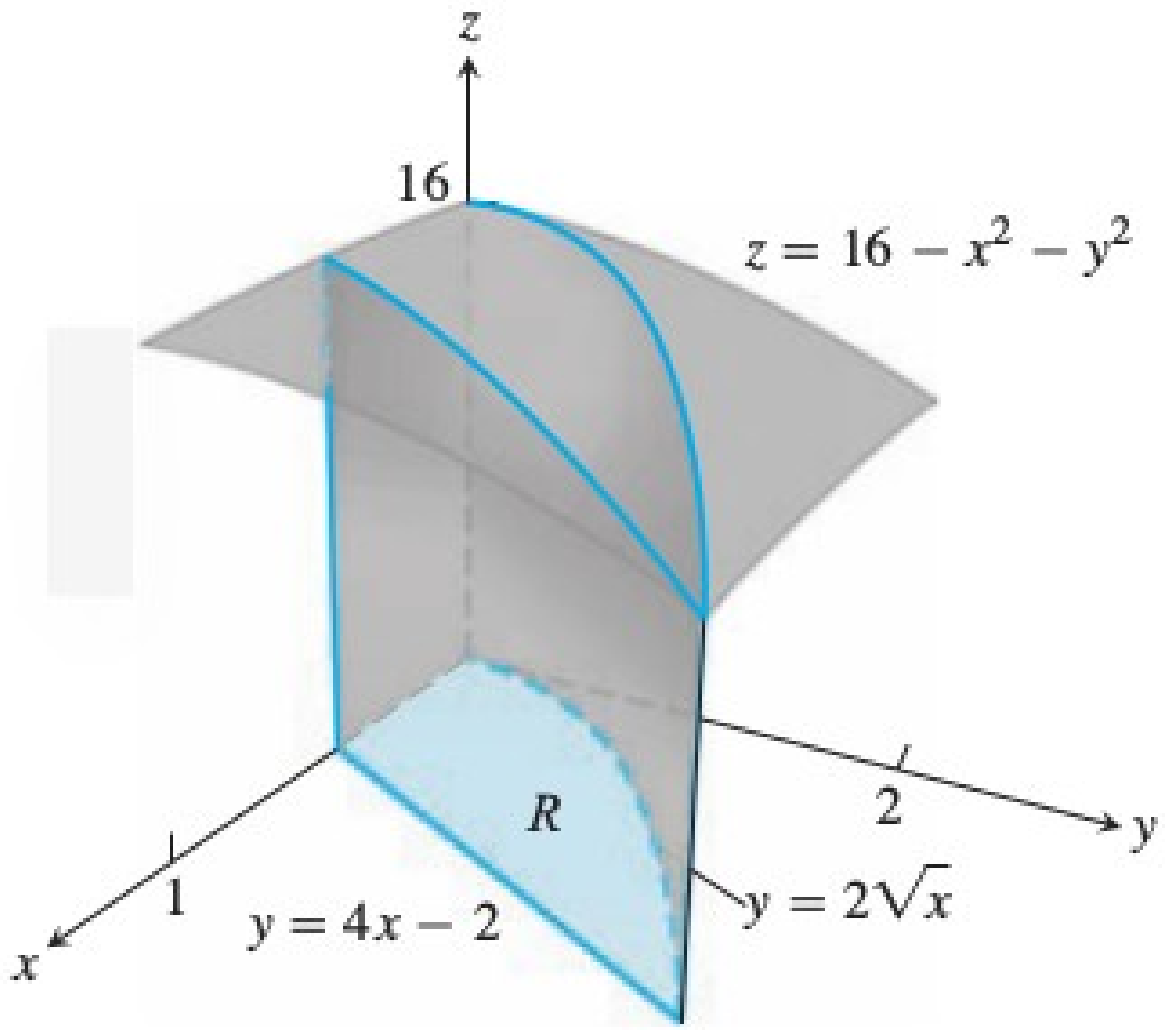
$$A = 2\left[\frac{0.786151\,(0.61806)+0.904524}{2} - \frac{0.48583}{3}\right],\quad x = 0.786151$$

$$A = 2\left[0.695212 - 0.161956\right]$$

$$A = 2\,(0.553256) \approx 1.066512$$

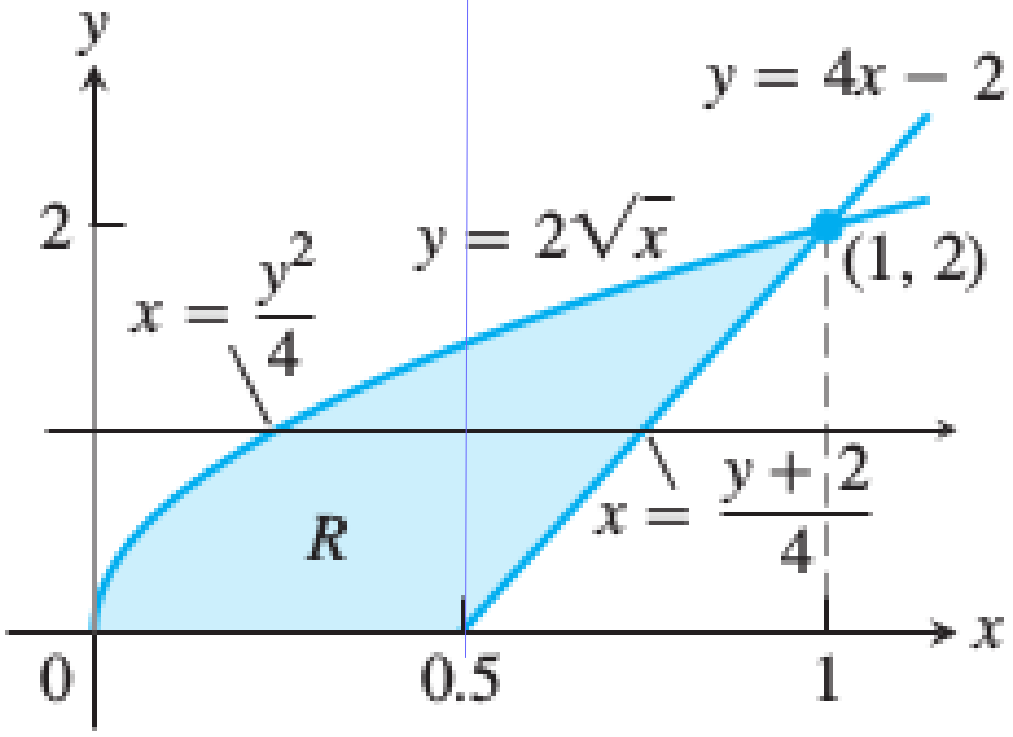
Integración de funciones de varias variables

Determine el volumen de la cuña sólida que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - y^2$ y arriba de la región R acotada por la curva $y=2(x)^{1/2}$, la recta $y = 4x - 2$ y el eje x.



Integración de funciones de varias variables

Si integramos primero respecto a “y” (dy dx) se requieren dos integraciones:
La primera con $0 \leq x \leq (1/2)$ y $0 \leq y \leq 2\sqrt{x}$
La segunda $(1/2) \leq x \leq 1$ y $(4x-2) \leq y \leq 2\sqrt{x}$



Integración de funciones de varias variables

Determine el volumen de la cuña sólida que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - y^2$ y arriba de la región R acotada por la curva $y=2(x)^{1/2}$, la recta $y = 4x - 2$ y el eje x.

$$\iint_R (16 - x^2 - y^2)\, da$$

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} (16 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

$$y = 2\sqrt{x} \;\Rightarrow\; h_1(y) = y^2/4$$

$$y = 4x - 2 \;\rightarrow\; h_2(y) = (y+2)/4$$

Integración de funciones de varias variables

Determine el volumen de la cuña sólida que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - y^2$ y arriba de la región R acotada por la curva $y=2(x)^{1/2}$, la recta $y = 4x - 2$ y el eje x.

$$\iint_R (16 - x^2 - y^2)\, da$$

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} (16 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$$

$$\int_{y=0}^{y=2} \left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} dy$$

Integración de funciones de varias variables

$$\int_{y=0}^{y=2} \left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} dy$$

$$\int_{y=0}^{y=2} \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} \right] - \left[4y^2 - \frac{(y^2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y^2)y^2}{4} \right]$$

...

Integración de funciones de varias variables

$$\int_{y=0}^{y=2} \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} \right] - \left[4y^2 - \frac{(y^2)^3}{3 \cdot 64} - \frac{(y^2)y^2}{4} \right]$$

$$\cdots$$

$$\left[\frac{y^7}{1344} + \frac{y^5}{20} - \frac{49\,y^4}{768} - \frac{145\,y^3}{96} + \frac{63\,y^2}{32} + \frac{191\,y}{24} \right]_0^2$$

$$= \frac{20{,}803}{1{,}680}$$